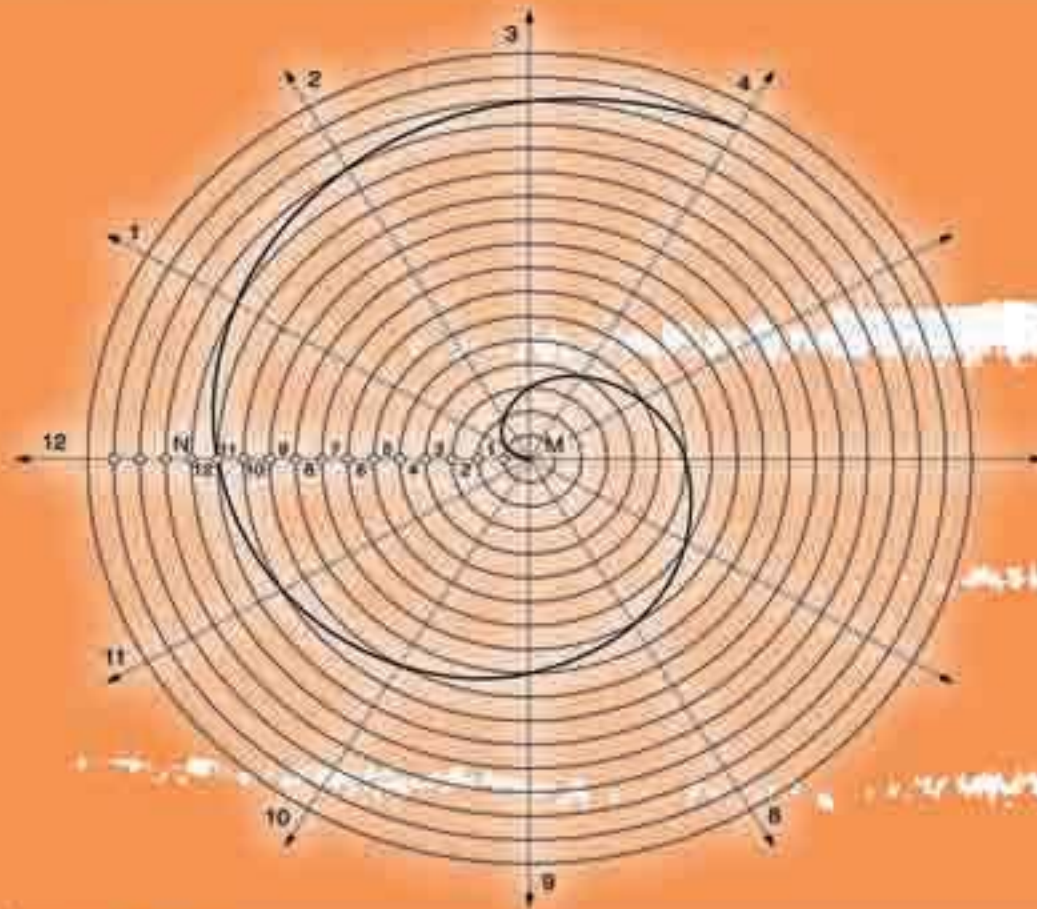


06

Corbes geomètriques



En l'actualitat, una part important dels objectes que es fabriquen estan fets sota algun tipus de forma corba geomètrica.

Si prestem atenció al nostre entorn, ens adonarem que en molts dels objectes que ens envolten hi són presents les corbes tècniques i les corbes còniques; per exemple, des de la forma de paràbola que alguns ulls de pont tenen fins a la forma d'oval o ovoide amb què s'han dissenyat certes culleres.

La natura també contribueix a crear aquest tipus de formes; els meandres d'alguns rius, o el vent en modelar les sorres dels deserts, donen testimoni d'aquest tipus de figures geomètriques.



6. Corbes geomètriques

6.2. Corbes tècniques

▶ 6.1. Corbes geomètriques

Es defineix una línia com a **corba geomètrica** quan s'aparta constantment de la direcció recta sense formar angles, i la trajectòria dels punts que la formen és contínua i, a més, compleix una determinada norma.

Hi ha dos grups de corbes geomètriques: les denominades **planes** i les **torcejades**.

Una corba rep el nom de **plana** quan tots els seus punts estan situats en un mateix pla; i corba **torcejada** quan quatre dels seus punts no es troben al mateix pla.

Segons la forma que tinguin de generar-se, les **corbes planes** es divideixen en **corbes tècniques** i **corbes còniques**, que tenen propietats específiques i diferents entre si.

▶ 6.2. Corbes tècniques

Les corbes tècniques tenen moltes aplicacions en la resolució de problemes de dibuix tècnic, tant si provenen de l'àmbit del disseny industrial, arquitectònic o gràfic.

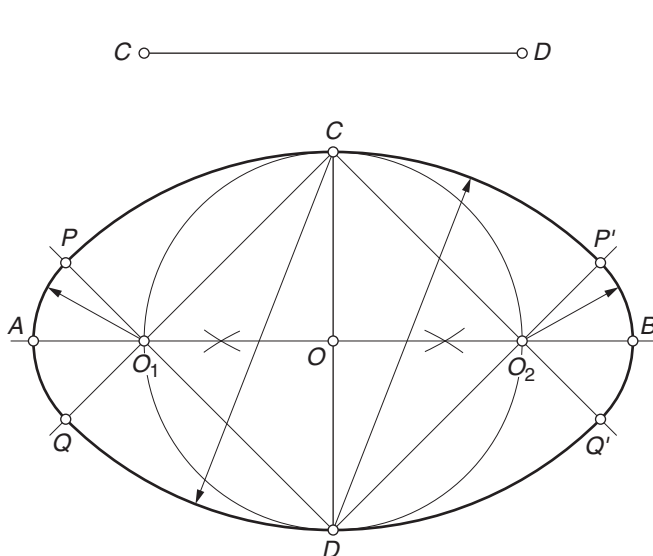
Les corbes d'aquest tipus es configuren mitjançant la unió d'arcs de circumferència que són tangents entre si, i donen lloc a la formació de figures planes que poden ser tancades: **oval**, **ovoide**; o obertes: **espirals**, **evolvent del cercle**, etc.

▶▶ A. Oval

▶▶▶ Definició

És una corba plana i tancada, simètrica en relació amb els seus dos eixos perpendiculars i formada per quatre arcs de circumferència iguals dos a dos.

▶▶▶ Construcció d'ovals



A continuació es desenvolupen alguns dels traçats d'ovals més utilitzats en dibuix tècnic.

Oval coneixent l'eix menor

1. Es traça la mediatriu de l'eix menor CD , i s'obté el punt O . A la mediatriu es troba l'eix major de l'oval.
2. Amb centre a O i radi OC es dibuixa una circumferència que talla l'eix major en els punts O_1 i O_2 ; s'uneixen aquests punts amb C i D allargant aquestes rectes.
3. Amb radi CD i centre a C i D , respectivament, es tracen dos arcs que determinen els punts P i P' , Q i Q' , punts de tangència entre els arcs que formen l'oval.
4. Per últim, amb centre a O_1 i O_2 , i radi O_1P , es tracen els altres dos arcs per unir P amb Q , i P' amb Q' ; així queda determinat l'oval. (Fig. 6.1)

Fig. 6.1. Oval coneixent l'eix menor.

6. Corbes geomètriques

6.2. Corbes tècniques



Oval coneixent l'eix major (primer procediment)

1. Es divideix l'eix major AB en tres parts iguals, i es determinen els punts O i O_1 . Amb centre en aquests punts i radi igual a $1/3$ d' AB , per exemple OA , es tracen dues circumferències que es tallen en els punts O_2 i O_3 .
2. S'uneixen mitjançant rectes els punts O i O_1 amb O_2 i O_3 , s'obtenen els quatre punts de tangència: P i P' , i Q i Q' .
3. Amb centre a O_2 i O_3 respectivament, i radi O_3P , es fan dos arcs fins a unir els punts P amb P' i Q amb Q' . Així, queda resolt l'oval que es demanava (Fig. 6.2).

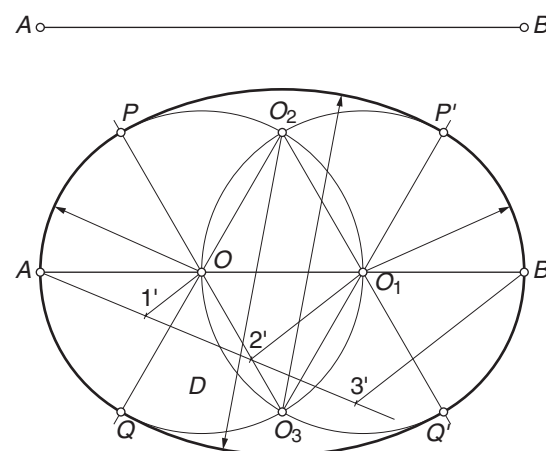


Fig. 6.2. Oval coneixent l'eix major, primer procediment.

Oval coneixent l'eix major (segon procediment)

1. Es divideix l'eix major AB en quatre parts iguals, i s'obtenen els punts O i O_1 que corresponen als punts 1 i 3 a l'eix dividit. Es tracen dues circumferències amb centre a O i O_1 , respectivament, i radi igual a $1/4$ d' AB , és a dir, OA .
2. Es tracen dos arcs amb centre també a O i O_1 , respectivament, i radi igual a OO_1 .
3. On els arcs es tallen, es troben els punts O_2 i O_3 , centres dels arcs majors de l'oval. Per trobar els punts de tangència s'uneixen els centres O_2 i O_3 amb els altres centres O i O_1 , i, a partir d'aquí, se segueix el mateix procediment que a l'exercici anterior (Fig. 6.3).

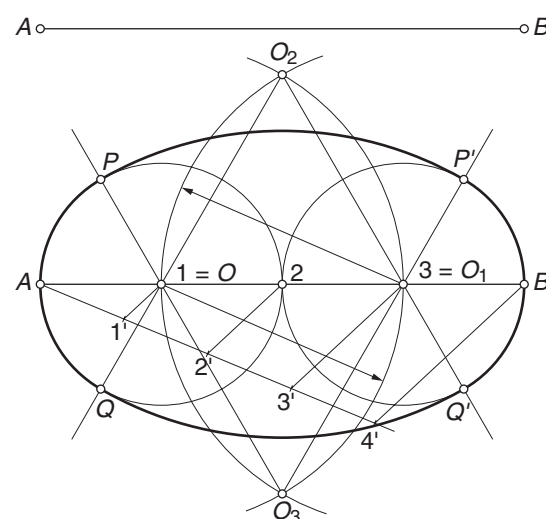


Fig. 6.3. Oval coneixent l'eix major, segon procediment.

Oval òptim coneixent tots dos eixos

1. Es traça un arc de centre a O amb radi OA que talla la prolongació de CD , eix menor, en el punt P . S'uneix A amb C , i es descriu un arc de radi CP amb centre a C fins a tallar el segment AC a V .
2. Es dibuixa la mediatriu d' AV , que talla la prolongació d' OD en el punt M o dins el propi segment, i el semieix major en el punt N . Es determinen els punts simètrics de M i N en relació amb els eixos de l'oval, M' i N' .
3. S'uneixen els punts M i M' amb N i N' , respectivament, i es tracen els arcs de centre M' i M amb radi $M'D$ i MC , s'obtenen els punts Q i Q' i P i P' .
4. Per últim, es dibuixen els arcs de centre N i N' amb radi NA i $N'B$ fins als punts de tangència anteriorment traçats: Q i Q' , i P i P' ; així s'aconsegueix construir l'oval (Fig. 6.4).

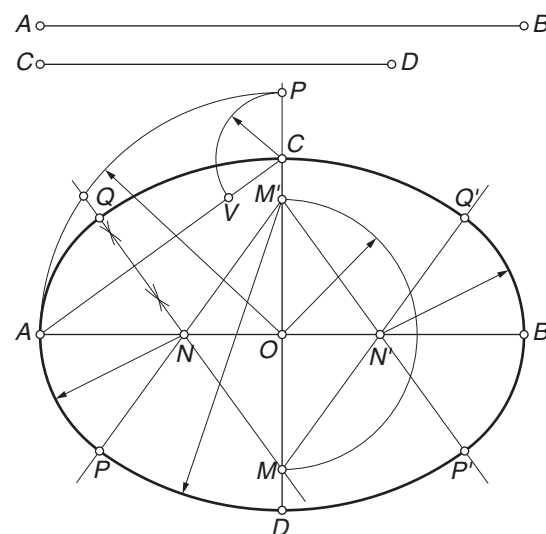
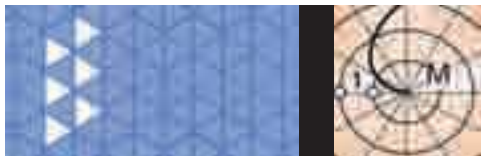


Fig. 6.4. Oval òptim coneixent tots dos eixos.



6. Corbes geomètriques

6.2. Corbes tècniques

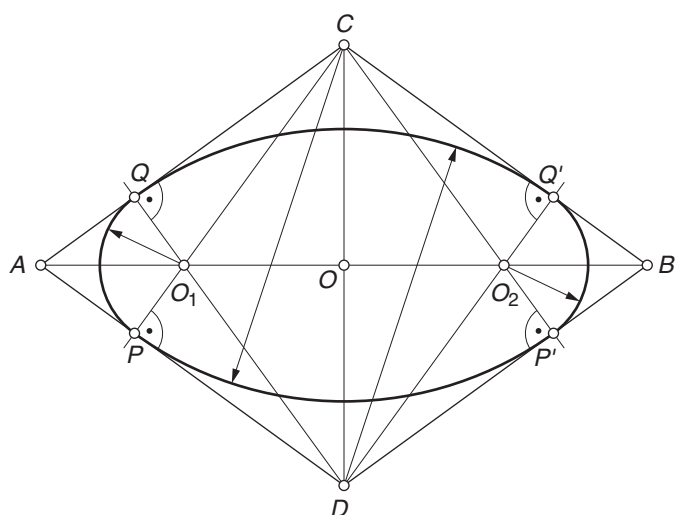


Fig. 6.5. Oval inscrit en un rombe.

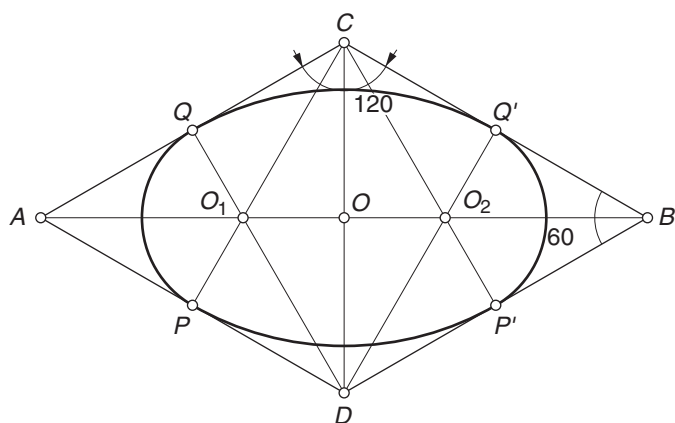


Fig. 6.6. Oval isomètric.

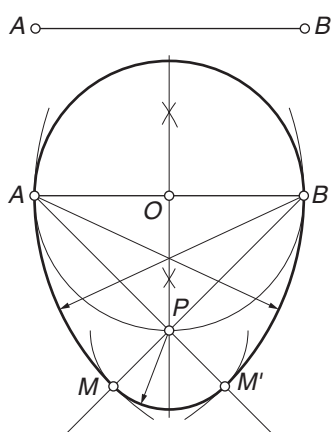


Fig. 6.7. Oval coneixent l'eix menor.

Oval inscrit en un rombe

1. Es parteix d'un rombe qualsevol $ABCD$. Des dels vèrtexs dels angles de major valor del rombe, es tracen rectes perpendiculars als costats oposats a ells, que tallen l'eix major i determinen els punts O_1 i O_2 , i als costats del rombe a P i P' , i Q i Q' .
2. Els punts C , D , O_1 i O_2 són els centres dels quatre arcs que formen l'oval que es demanava.
3. Amb centre a C i D respectivament, i radi CP , es tracen dos arcs fins a unir P amb P' , i Q amb Q' . De la mateixa manera, amb centre a O_1 i O_2 , es tracen dos arcs fins a unir P amb Q i P' amb Q' , així es determina la construcció de l'oval (Fig. 6.5).

Oval isomètric

En el cas que els angles majors de l'oval on s'hagi d'inscriure l'oval valguin 120° , i per tant els menors valguin 60° , l'oval inscrit s'anomena **isomètric**. La seva construcció es realitza de la mateixa manera que en el cas descrit anteriorment.

La raó d'adoptar aquest nom ve donada perquè aquesta figura es fa servir en dibuix isomètric per substituir, de manera aproximada, l'el·lipse que tingui el mateix valor d'eixos que l'oval. (Fig. 6.6).

►► B. Ovoides

►►► Definició

L'**ovoides** és una corba plana i tancada, simètrica només en relació amb el seu eix major, i formada per quatre arcs de circumferència, dels quals dos són iguals i els altres dos són desiguals.

►►► Construcció d'ovoides

A continuació es desenvolupen alguns dels traçats d'ovoides més utilitzats en dibuix tècnic.

Ovoide coneixent l'eix menor

1. Es dibuixa la mediatriu de l'eix conegut AB , i s'obté el punt O . Amb centre a O i radi OA , es traça una circumferència que talla la mediatriu en el punt P .
2. S'uneixen els punts A i B amb P , amb la qual cosa s'arriba a les rectes r i s . Es tracen dos arcs amb radi AB i centre als punts A i B , de manera que s'obtenen els punts M i M' .
3. Amb centre a P i radi PM o PM' , es descriu l'últim arc que configura l'ovoides que es demanava. (Fig. 6.7).



Ovoide coneixent l'eix major

1. Es divideix l'eix major AB en sis parts iguals, i per la segona divisió es traça una perpendicular a l'eix. Es fa centre en aquesta mateixa divisió, és a dir, a la 2 i, amb radi 2-6, es descriu un arc que determina els punts P i Q .
2. S'uneixen P i Q amb el punt 5, cinquena divisió d' AB . Es fa centre al punt 2 i, amb radi $2P$ o $2Q$ es dibuixa una semicircumferència i s'obtenen sobre el segment PQ els punts H i I . Amb centre a P i Q , respectivament, i radi PI , es tracen els arcs que determinen els punts M i N .
3. Per últim, amb centre al punt 5, i amb radi $5M$, es traça un arc per acabar de construir l'ovoide que es demana (Fig. 6.8).

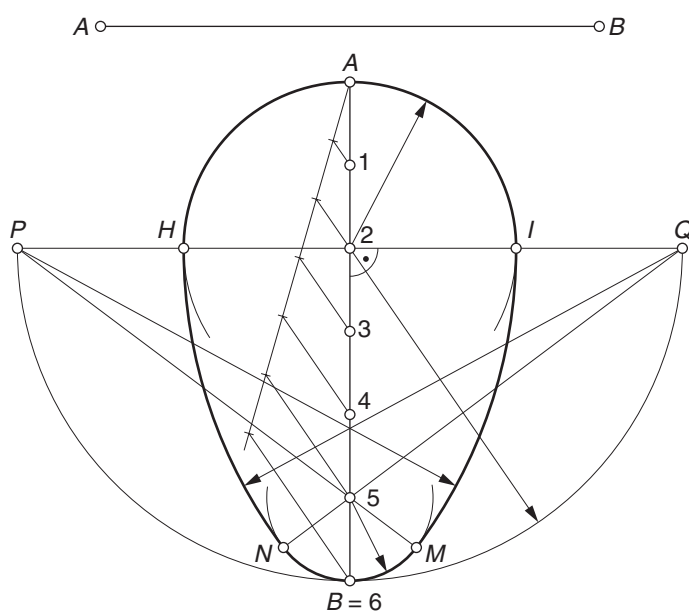


Fig. 6.8. Ovoide coneixent l'eix major.

►► C. Espiral

►►► Definició

L'**espiral** és una corba plana, oberta i contínua que es configura en expansió per un punt que es desplaça de manera uniforme al llarg d'una recta, que està fixa en un punt pel qual gira amb un valor angular constant. Una espiral es defineix pels elements següents:

Pas: és la distància longitudinal amb què es desplaça un punt de la corba en una volta completa. És a dir, és la distància entre dues espires consecutives.

Espira: és la part de la corba descrita a cada volta.

Nucli: és a partir d'on es genera, en expansió, l'espiral. Els nuclis poden ser lineals si els centres estan situats en una línia, o poligonals si són els vèrtexs dels polígons els centres que generen la corba.

Radis vectors: són la prolongació, o bé de la línia on estan situats els centres del nucli o bé dels costats del polígon que fa de nucli.

Ovoide coneixent tots dos eixos

1. Es pren l'eix menor CD i se'n traça la mediatriu, i s'obté el punt O . Amb centre a O i radi OC , es dibuixa una circumferència que talla la mediatriu en els punts A i J . Des d' A i sobre aquesta mediatriu, es porta el valor de l'eix major AB , i d'aquesta manera queden situats els eixos de l'ovoide.
2. Amb centre a J i radi JB , es dibuixa una circumferència. A partir de C i sobre CD , es porta la magnitud JB i s'obté el punt M . Es determina la mediatriu de MJ ; i s'obté el punt N sobre el segment OD .
3. Es troba el simètric de N sobre CO , i s'obté el punt N' . S'uneixen els punts N i N' amb J , determinen els punts de tangència Q i Q' .
4. Per últim, amb centre a N i N' respectivament, i radi NC , es tracen els arcs fins a unir C amb Q i D amb Q' , amb la qual cosa s'obté l'ovoide que es buscava (Fig. 6.9).

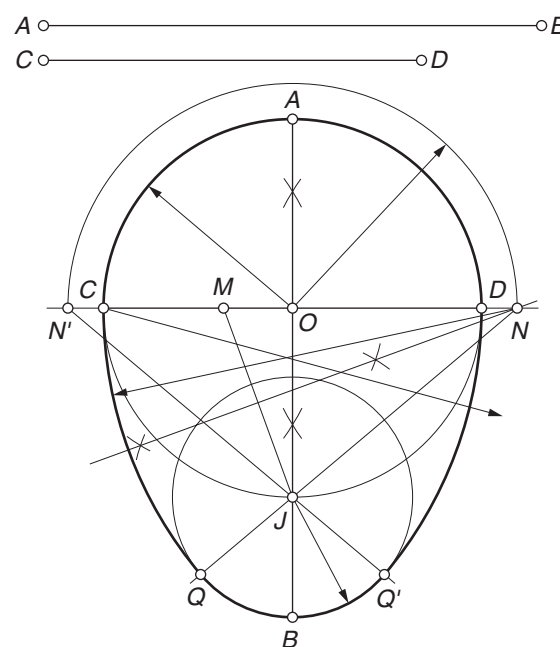
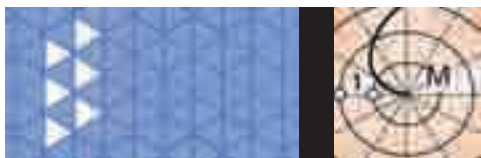


Fig. 6.9. Ovoide coneixent tots dos eixos.



6. Corbes geomètriques

6.2. Corbes tècniques

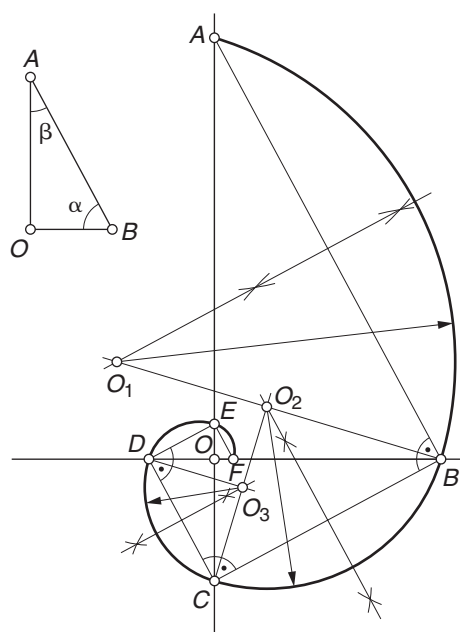


Fig. 6.10. Espiral logarítmica.

►►► Construcció d'espivals

A continuació es desenvolupen alguns dels traçats d'espivals més utilitzats en dibuix tècnic.

Espirai logarítmica

1. En aquesta corba es comprova que el moviment de translació no és uniforme, sinó que segueix una progressió geomètrica, de manera que el pas és variable.
2. Per construir-la, es tracen dos eixos perpendiculars entre si, i s'obté el punt O on es tallen. Es traça un triangle rectangle ABO , els catets del qual formen amb la hipotenusa els angles que es volen deixar constants durant el recorregut del punt generador. Partim del triangle escollit ABO .
3. Pel punt B es traça una perpendicular a la hipotenusa AB , i això determina sobre l'altre eix el punt C pel qual, al seu torn, es traça una altra perpendicular al segment BC i s'obté el punt D sobre l'altre eix, i així successivament.
4. Es tracen les mediatris dels segments que contenen els punts A, B, C, D , etc., i on aquestes tallin les bisectrius dels angles rectes que formen la línia poligonal definida per aquests s'obtenen els centres O_1, O_2, O_3 , etc. dels diferents arcs de circumferència que configuren l'espival. Descrits aquests amb els seus radis particulars O_1A, O_2B, O_3C , etc. i units convenientment, donen com a resultat la construcció de l'espival com pot apreciar-se a la Figura 6.10.

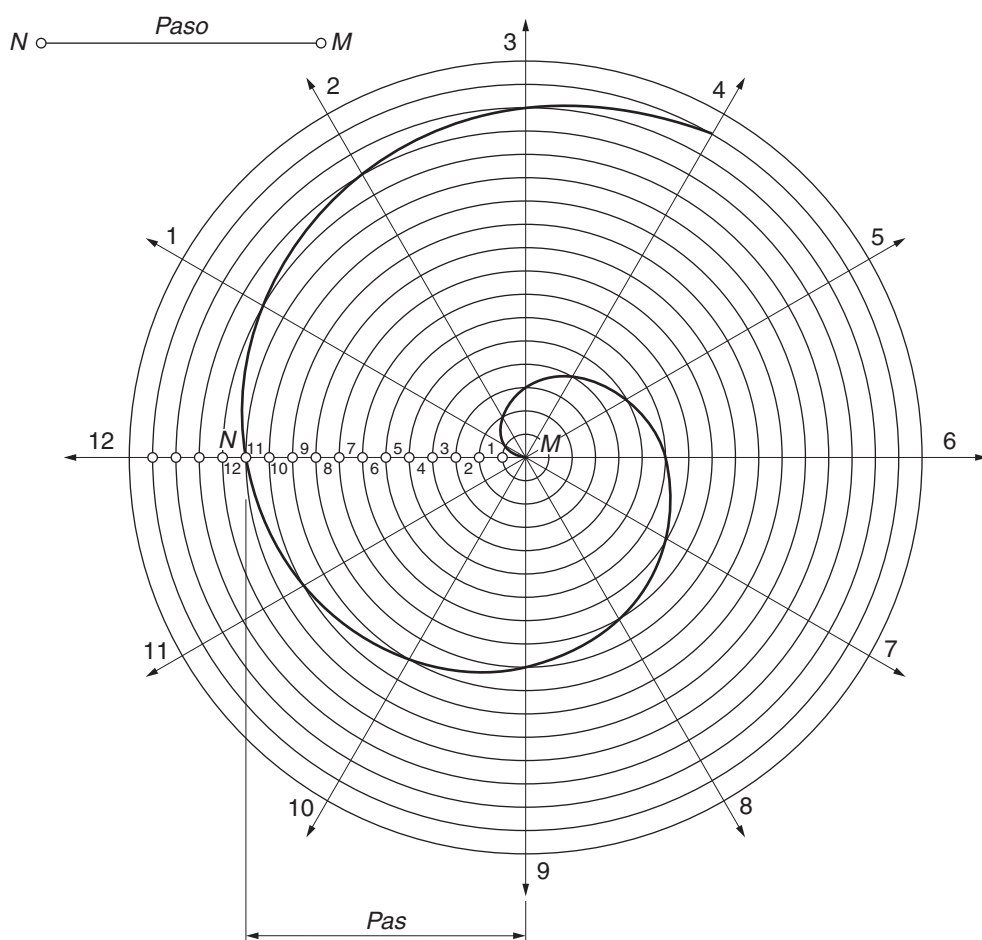


Fig. 6.11. Espiral d'Arquímedes.

Espirai d'Arquímedes coneixent el pas MN

1. Es divideix el segment MN en un nombre qual-sevol de parts iguals, per exemple dotze. Amb centre a M i amb radis $M1, M2 \dots$ fins a $M12$, es tracen circumferències.
2. Es divideix la circumferència en dotze parts iguals i es tracen els radis respectius. La intersecció d'aquests radis amb els arcs corresponents determinen els diversos punts que configuren l'espival, punts que, units amb traç continu, determinen la corba que es demana (Fig. 6.11).



►► C. Voluta

►►► Definició

Es denomina **voluta** la corba plana, oberta i contínua composta per arcs de circumferència, tangents entre ells, els centres dels quals són els vèrtexs d'un polígon bàsicament regular.

►►► Construcció de volutes

A continuació es desenvolupen alguns dels traçats de volutes més utilitzats en dibuix tècnic.

Volutes de nucli triangular, quadrangular i hexagonal

1. La construcció d'aquest tipus de volutes és molt senzill: només cal fixar-ne la posició dels centres i la longitud del radi inicial. Observa, a les Figures 6.12, 6.13 i 6.14, com en el dibuix de cada una d'elles, els traçats per construir-les es repeteixen a partir de la primera volta, els seus arcs es desenvolupen de manera paral·lela.

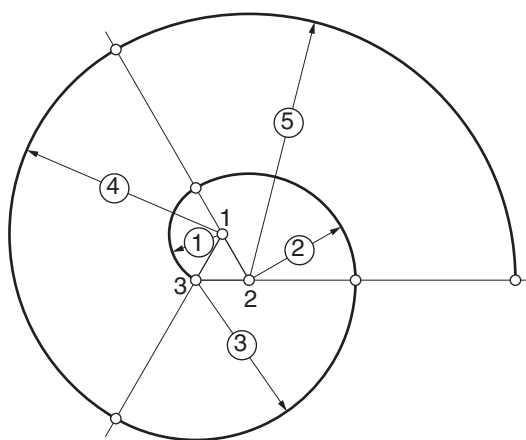


Fig. 6.12. Voluta de nucli triangular.

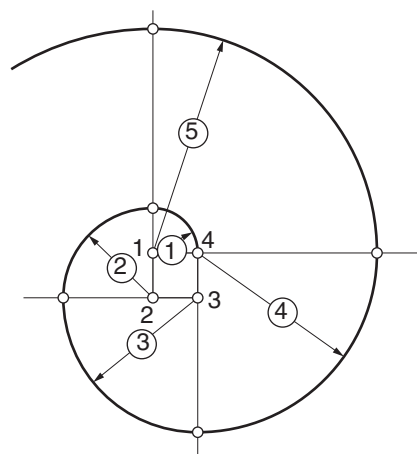


Fig. 6.13. Voluta de nucli quadrangular.

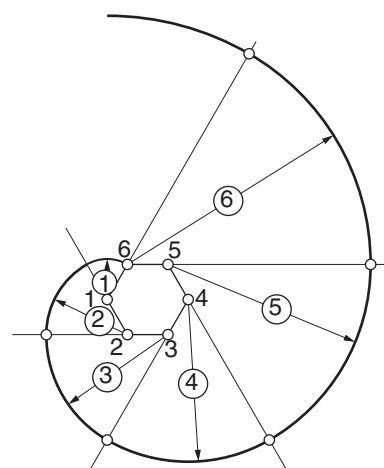


Fig. 6.14. Voluta de nucli hexagonal.

Voluta jònica

1. Es parteix d'una circumferència la longitud de la qual és igual al pas en què es vol construir la voluta. S'hi inscriu un quadrat $ABCD$ i s'hi tracen paral·leles als costats pels dos punts mitjos d'aquests, i s'obtenen els punts 9, 10, 11 i 12.
2. Es divideixen els segments 9-11 i 10-12 en sis parts iguals, i es numeren de la manera indicada a la Figura 6.15. Es dibuixen les diagonals del quadrat prolongant-les; en aquestes diagonals es troben els punts de tangència de la voluta.
3. Amb centre a 1 i radi $1A$, es traça un arc fins a la diagonal i es determina el punt E , amb centre a 2 i radi $2E$, es traça un altre arc fins a tallar la següent diagonal en el punt F , i així successivament (Fig. 6.15).

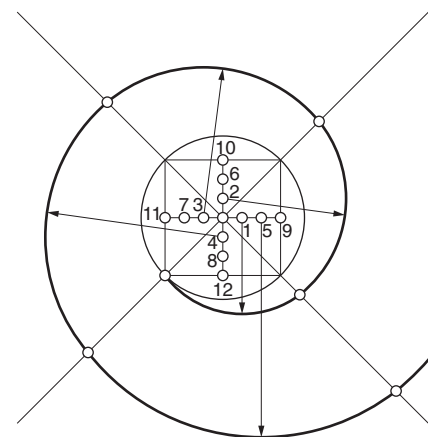


Fig. 6.15. Voluta jònica.



6.3. Corbes còniques

Les **corbes còniques** s'obtenen en seccionar un con de revolució amb un pla secant. Un con de revolució és un cos geomètric que pot considerar-se engendrat per una línia recta denominada **generatriu**, que es mou fixa en un punt (centre de generació o **vèrtex** del con), al voltant d'un **eix** i amb una direcció circular anomenada **directriu**. (Fig. 6.19).

A. Classificació de les corbes còniques

La posició del pla secant en relació amb l'eix del con possibilita diferents tipus de corbes. A més de la circumferència, que es genera quan el pla secant (o pla secció) és perpendicular a l'eix del con, són figures còniques l'el·lipse, la paràbola i la hipèrbola.

Si el pla secció és paral·lel a l'eix i talla el con, la secció és una **hipèrbola**. És a dir, $\alpha < \beta$ (Fig. 6.21).

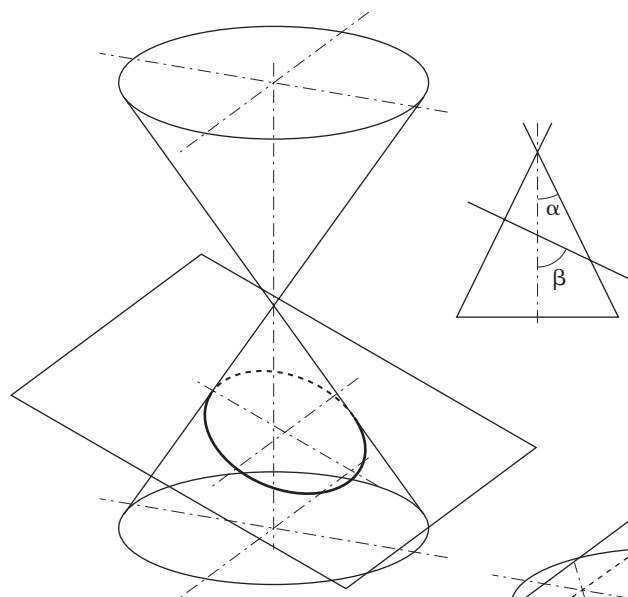


Fig. 6.20. El·lipse.

És convenient apuntar que les corbes còniques, excepte la circumferència, ja estudiada, es construeixen per mitjà de l'obtenció de punts que configuren la corba, i que posteriorment cal unir-los, o bé a mà alçada o mitjançant l'ús de plantilles de corbes.

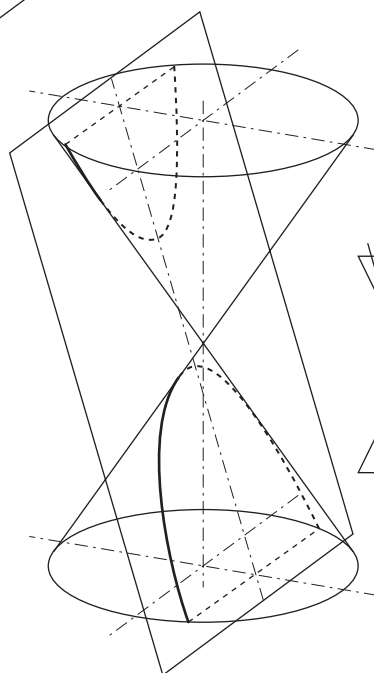


Fig. 6.21. Hipèrbola.

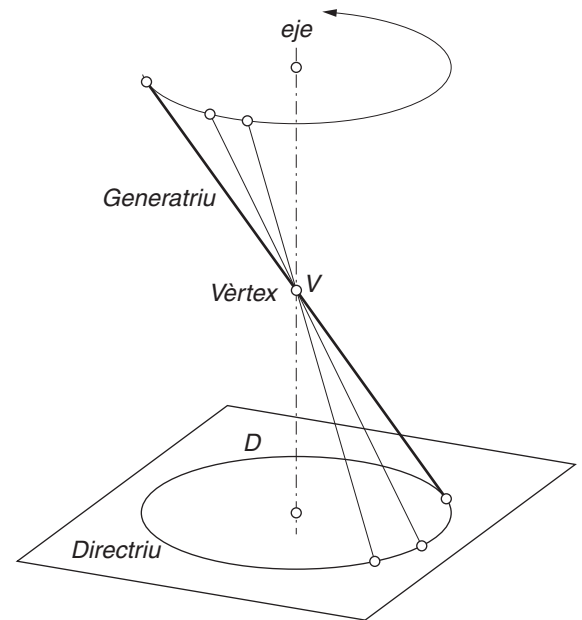


Fig. 6.19. Elements d'un con de revolució.

Si el pla secció és oblic i talla totes les generatrius del con, la secció és una **el·lipse**. És a dir, $\alpha > \beta$ (Fig. 6.20).

Si el pla secció és oblic a l'eix i paral·lel a una de les generatrius del con, la secció és una **paràbola**. És a dir, $\alpha = \beta$ (Fig. 6.22).

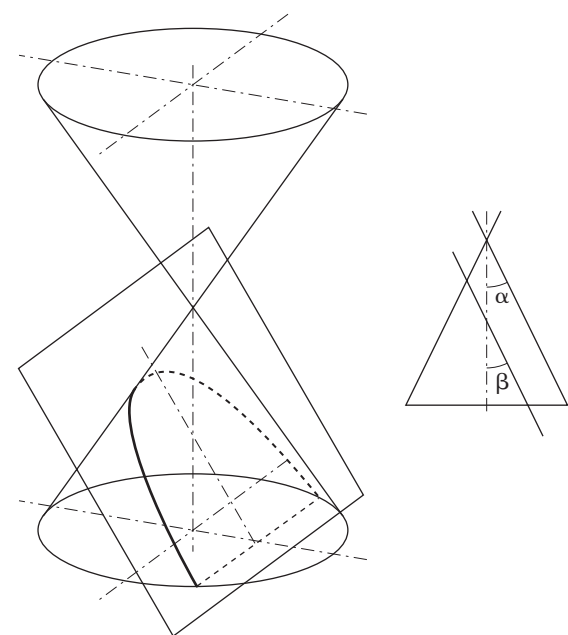
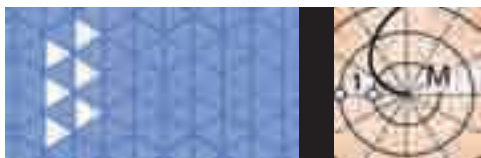


Fig. 6.22. Paràbola.



6. Corbes geomètriques

6.3. Corbes còniques

►► B. Elements de les corbes còniques

Vegem els elements més importants que formen les corbes còniques i que són necessaris per construir-les:

- **Focus:** són els punts F i F' de contacte de les esferes inscrites al con amb el pla secant que genera les seccions còniques, i estan situats a l'eix de simetria. L'el·lipse i la hipèrbola tenen dos focus, i la paràbola en té només un.
- **Vèrtexs:** són els punts extrems dels eixos de la corba.
- **Eixos:** amb aquest terme es denominen els **eixos de simetria** de la corba. Tant l'el·lipse com la hipèrbola tenen dos eixos de simetria que són perpendiculars entre ells. La paràbola en té només un.
- **Centre:** és el punt on es tallen els eixos de simetria i, per tant, el centre de la corba.
- **Directrius:** són les rectes d'intersecció que fa el pla secant (que genera la corba cònica) amb els plans que contenen les circumferències tangents de les esferes amb el con.
- **Circumferència principal:** és el lloc geomètric de les projeccions dels focus sobre les rectes tangents a la cònica. El centre d'aquesta circumferència és el centre de l'el·lipse o de la hipèrbola i el radi és igual a la meitat del seu eix major. En el cas de la paràbola, el radi és infinit.
- **Circumferència focal:** és el lloc geomètric dels punts simètrics de l'altre focus en relació amb les rectes tangents a la cònica. El centre d'aquestes circumferències són els focus i els radis són la longitud de l'eix major en el cas de l'el·lipse i la hipèrbola. A la paràbola, el radi és infinit.

►► C. El·lipse

És una corba plana i tancada, lloc geomètric de tots els punts del pla, la suma de distàncies dels quals a dos punts fixos, anomenats focus F i F' , és constant i igual a l'eix major AB .

$$PF + PF' = AB$$

►►► Elements de l'el·lipse

Els elements més significatius que configuren l'el·lipse són els següents: (Fig. 6.23):

- **Eixos:** té dos eixos AB i CD perpendiculars entre ells, que es tallen en el punt O , centre de l'el·lipse. L'eix major s'anomena eix real o principal, i l'eix menor, secundari o virtual. Aquesta corba és simètrica en relació amb aquests eixos.
- **Focus:** anomenats F i F' , estan situats en l'eix real, i es troben fent centre en un dels extrems de l'eix virtual C o D , i radi igual al semieix real.
- **Distància focal:** és la distància que existeix entre tots dos focus.
- **Radis vectors:** són les rectes que uneixen un punt qualsevol de l'el·lipse amb els focus.
- **Circumferència principal:** és la que es determina fent centre a O , centre de l'el·lipse, i radi igual al semieix major.
- **Circumferència focal:** l'el·lipse té dues circumferències focals. Per dibuixar-les es pren com a radi l'eix real i centre F i F' , respectivament.

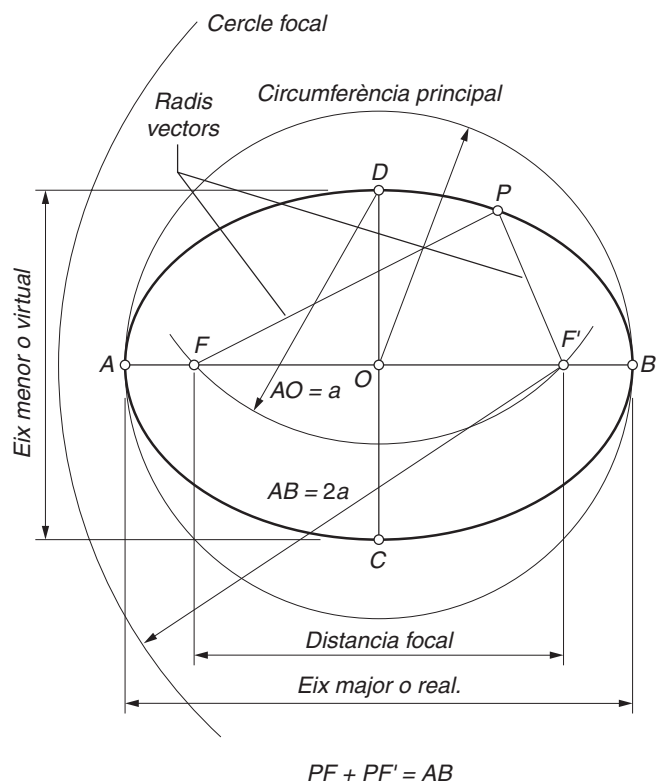


Fig. 6.23. Elements de l'el·lipse.

6. Corbes geomètriques

6.3. Corbes còniques



La nomenclatura més utilitzada en geometria per denominar els eixos i la distància focal és la següent:

- **Eix major o real** = $AB = 2a$; semieix major o real a .
- **Eix menor o virtual** = $CD = 2b$; semieix menor o virtual = b .
- **Distància focal** = $FF' = 2c$.

►►► Construcció de l'el·lipse

A continuació es desenvolupen alguns dels traçats de l'el·lipse més utilitzats en dibuix tècnic.

El·lipse coneixent tots dos eixos. Per punts

1. Es tracen dues rectes perpendiculars i s'obté en el tall el punt O . Sobre aquestes se situen els eixos de l'el·lipse $A = 2a$ i $CD = 2b$. Amb centre a C o D i radi OA , es traça un arc que talla l'eix real en els punts F i F' , focus de la corba.
2. Es divideix en un nombre de parts la distància focal 1, 2, 3, etc. Amb centre a F i radi $1A$ es tracen dos arcs; amb radi $1B$ i centre a F' es tracen uns altres dos arcs que tallen els dos anteriors a E i F , punts de l'el·lipse.
3. Amb centre a F i radi $2A$, es tornen a traçar dos arcs; amb radi $2B$ i centre a F' es tracen uns altres dos arcs que tallen els anteriors en els punts G i H , uns altres dos punts de la corba. Repetim aquesta operació prenent altres punts 3, 4, etc. de l'eix real per seguir trobant punts de l'el·lipse i, finalment, s'uneixen els punts determinats manualment o amb plantilles, amb la qual cosa s'obté l'el·lipse que es demanava. (Fig. 6.24).

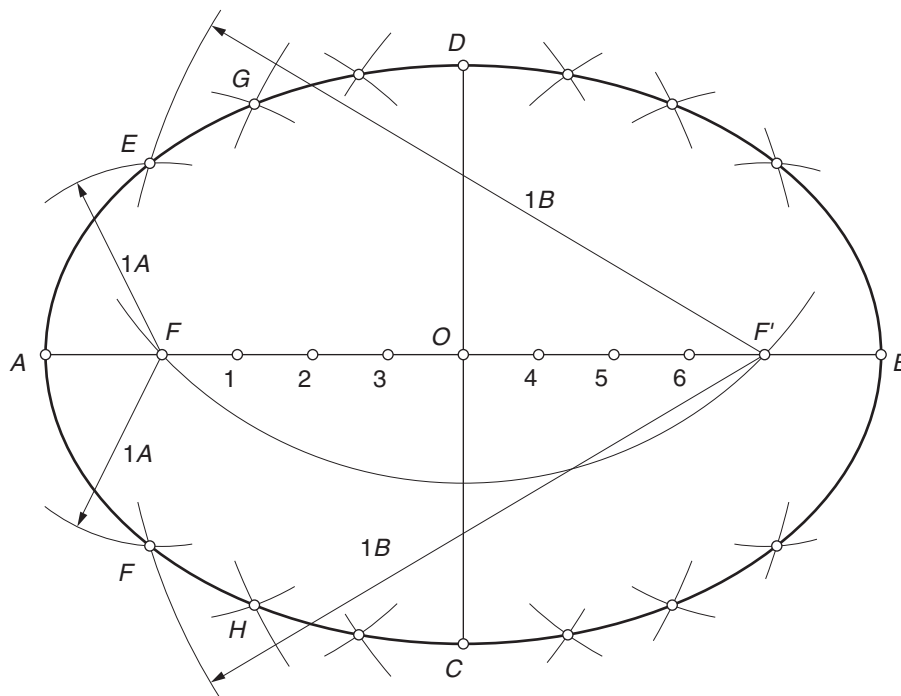
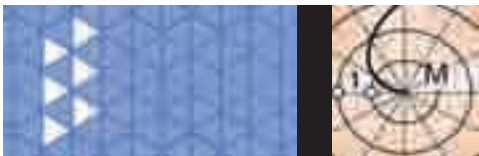


Fig. 6.24. Construcció de l'el·lipse per punts.



6. Corbes geomètriques

6.3. Corbes còniques

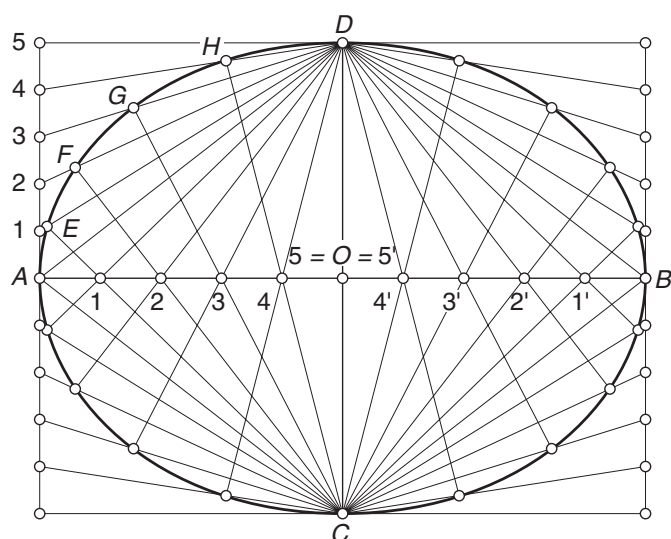


Fig. 6.25. Construcció de l'el·lipse per feixos projectius.

El·lipse coneixent tots dos eixos. Per feixos projectius

1. Es dibuixa un rectangle de costats iguals al valor dels eixos de l'el·lipse. Es tracen els eixos dins aquest rectangle. Es divideixen els segments OA i AE en el mateix nombre de parts i iguals a cada segment. En aquest cas, cinc.
2. Les interseccions dels raigs $C1, C2, C3$ i $C4$ amb els raigs $D1, D2, D3$ i $D4$, respectivament, determinen diferents punts de l'el·lipse E, F, G i H .
3. Observa que els punts de la corba en els altres tres quadrants de l'el·lipse s'han obtingut aplicant el mateix mètode. Per últim, només queda unir aquests punts per completar l'el·lipse (Fig. 6.25).

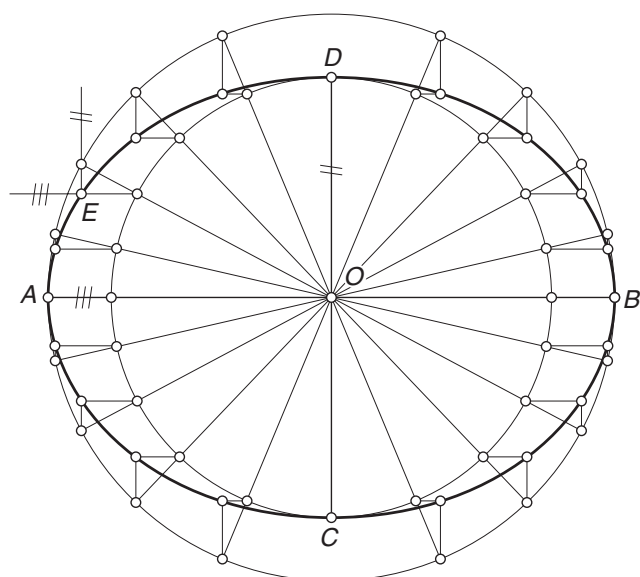


Fig. 6.26. Construcció de l'el·lipse per afinitat.

El·lipse coneixent tots dos eixos. Per circumferències concèntriques o afinitat

1. Es dibuixen dues circumferències concèntriques de radis iguals als valors dels semieixos major i menor. Es tracen diferents radis de les dues circumferències.
2. Pels extrems dels radis de la circumferència major, es tracen rectes paral·leles a l'eix menor. Pels extrems dels radis de la circumferència menor, es tracen paral·leles a l'eix major.
3. Els punts d'intersecció de les respectives paral·leles determinen punts de l'el·lipse buscada (Fig. 6.26).

6. Corbes geomètriques

6.3. Corbes còniques



El·lipse coneixent tots dos eixos. Mètode de la tira de paper

1. Aquest és un mètode senzill i ràpid per traçar el·lipses. El procediment està basat en la definició d'el·lipse. Consisteix, per tant, a marcar sobre una tira de paper, amb traços petits, la longitud del semieix major AO i la del semieix menor CO .
2. Es fa coincidir el punt N sobre el semieix major AO de l'el·lipse que es dibuixarà, i el punt F sobre el semieix menor CO , i M és un punt de l'el·lipse. Repetint aquest procediment s'aconsegueixen nous punts, tants com es desitgin.
3. Cal no oblidar que els punts N i F de la tira de paper han de coincidir sempre sobre els eixos de l'el·lipse que es vol dibuixar. Per últim, només cal unir els punts trobats de manera manual o amb plantilles per determinar la corba (Fig. 6.27).

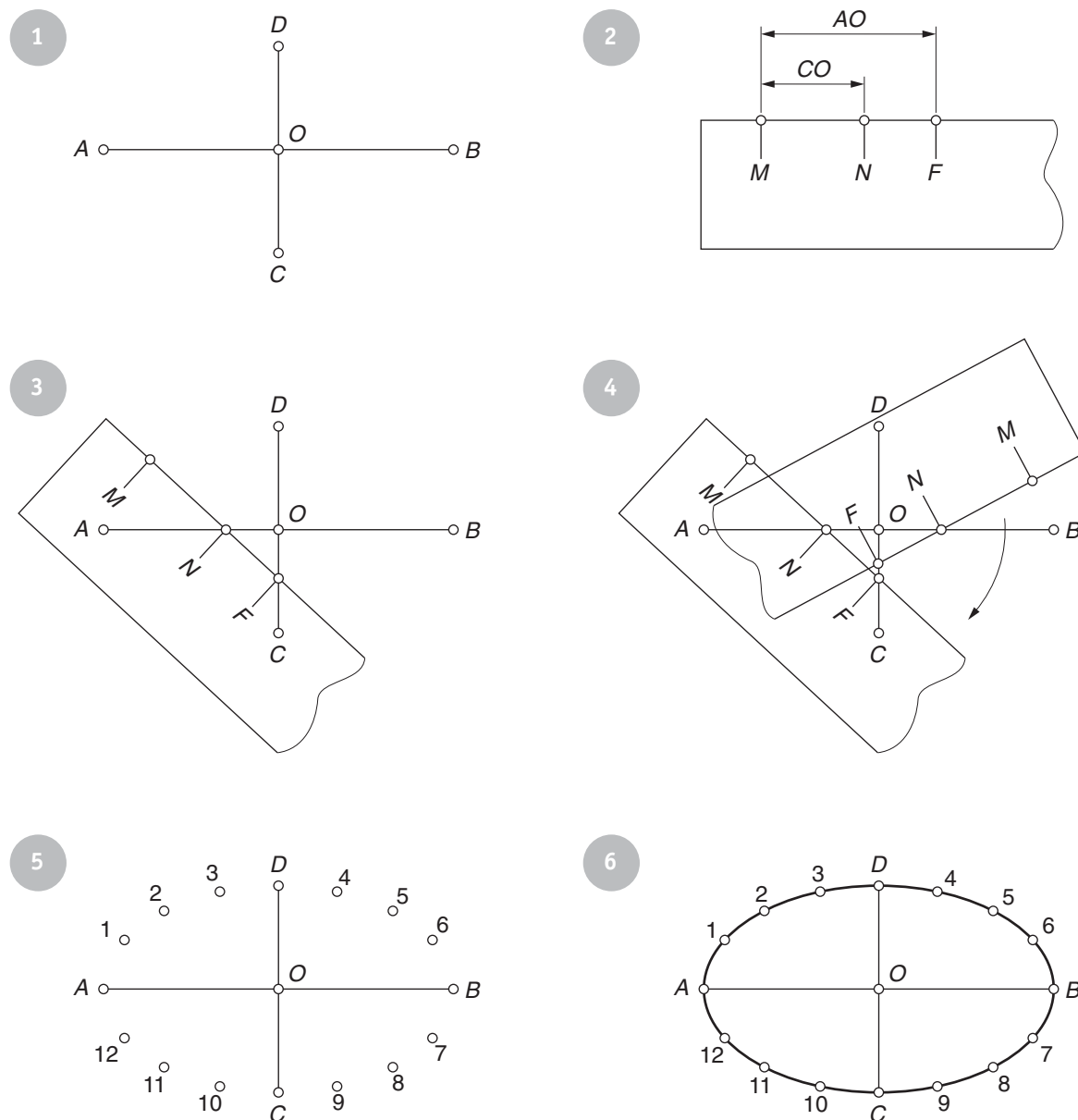
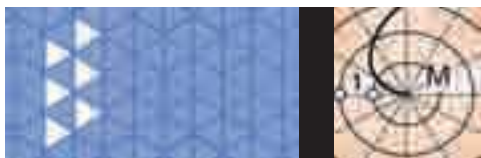


Fig. 6.27. Construcció de l'el·lipse pel mètode de la tira de paper.



6. Corbes geomètriques

6.3. Corbes còniques

El·lipse coneixent tots dos diàmetres conjugats

Donat un diàmetre qualsevol JK d'una el·lipse, el seu conjugat MN és el lloc geomètric dels punts mitjos de totes les cordes paral·leles a JK . Es pot observar a la Figura 6.28 que la corda EF , paral·lela al diàmetre JK , és tallada a P , que és un punt mig, pel diàmetre MN .

1. Es parteix dels diàmetres conjugats AB i CD . Es dibuixa una circumferència de diàmetre igual al major dels diàmetres conjugats AB . Sobre aquesta es traça un altre diàmetre $C'D'$, perpendicular a AB .
2. Es divideix AB en n parts, per exemple sis, i s'hi tracen paral·leles a CD i $C'D'$. Es tracen els segments que uneixen els punts C' amb C , i D' amb D .
3. On les cordes tallen la circumferència, es tracen paral·leles a $D'D$ i $C'C$ que tallen les paral·leles al diàmetre conjugat CD en els punts E i E' , F i F' , etc., i així successivament; d'aquesta manera es van determinant els punts de l'el·lipse buscada (Fig. 6.29).

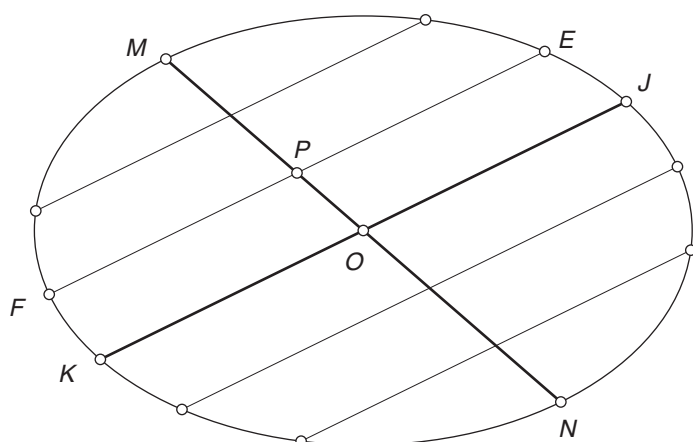


Fig. 6.28. Diàmetres conjugats d'una el·lipse.

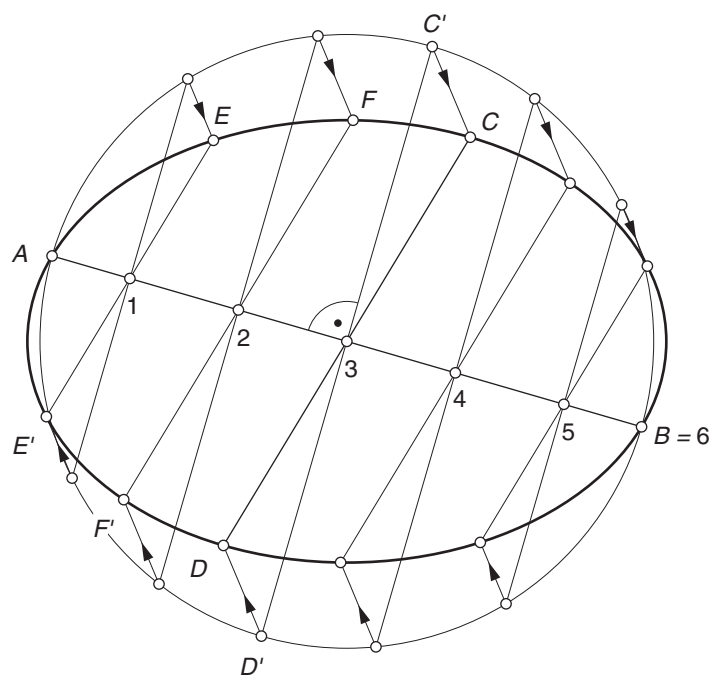


Fig. 6.29. El·lipse coneixent-ne tots dos diàmetres conjugats.

Determinació dels eixos d'una el·lipse coneixent tots dos diàmetres conjugats

1. Es parteix dels diàmetres conjugats AB i CD . Per D es traça una perpendicular al diàmetre AB , i es porta a partir de D el semidiàmetre a cada costat, és a dir, $OA = DP = DQ$.
2. S'uneix el punt O amb P i Q , i es troba la bisectriu de l'angle POQ ; aquesta recta conté l'eix major de l'el·lipse. Per O es traça una perpendicular a l'eix major; aquesta recta conté l'eix menor. I per D es traça una paral·lela; on aquesta talli el segment OP s'obtindrà el punt J .
3. OJ és el valor del semieix menor i JP , el del semieix major. Es traslladen aquestes magnituds a partir d' O a tots dos costats dels eixos, i queden determinats MN i EF , eixos de l'el·lipse buscada. (Fig. 6.30)

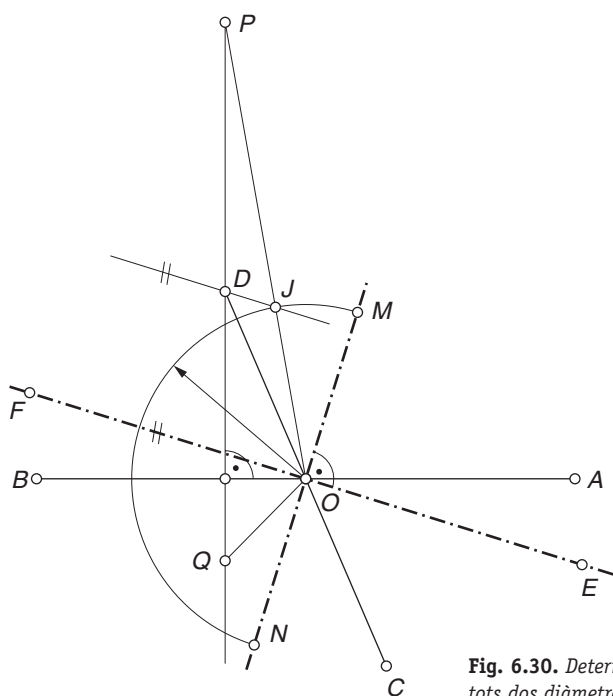


Fig. 6.30. Determinació dels eixos d'una el·lipse coneixent tots dos diàmetres conjugats.



►► D. Hipèrbola

La hipèrbola és una corba plana i oberta, lloc geomètric de tots els punts del pla la diferència de distància dels quals a dos punts fixos, anomenats focus F i F' , és constant i igual a l'eix real AB , és a dir, a la distància entre els vèrtexs V i V' .

$$PF - PF' = AB$$

►►► Elements de la hipèrbola

Els elements més significatius que configuren la hipèrbola són els següents: (Fig. 6.33):

- **Eixos:** té dos eixos: AB , eix real, i CD , eix imaginari; són perpendiculars entre ells i es tallen al punt O . L'eix real conté els vèrtexs A i B de cada branca de la corba. La hipèrbola consta de dues branques simètriques en relació amb els dos eixos.

En aquesta corba, la distància des del centre de simetria O a cada focus és igual a la distància AC , quan A és un extrem de l'eix real i C , un extrem de l'eix imaginari. Aquesta propietat permet, si es coneix un dels eixos i els focus, determinar l'altre eix (Fig. 6.31); i, lògicament, si es coneixen tots dos eixos, es poden obtenir els focus (Fig. 6.32).

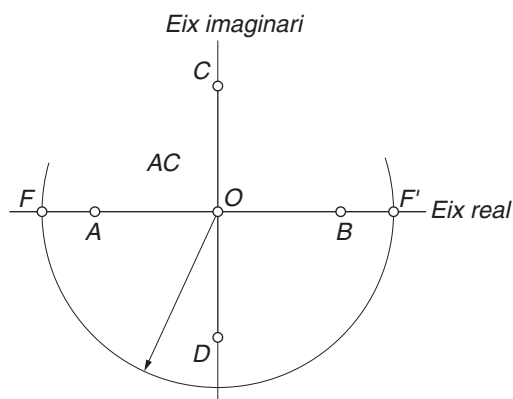


Fig. 6.32. Determinació dels focus de la hipèrbola.

- **Focus:** denominats F i F' , estan situats a l'eix real i es troben fent centre a O i radi igual a la distància AC .
- **Distància focal:** és la distància que hi ha entre tots dos focus.
- **Radis vectors:** són les rectes que uneixen un punt qualsevol de la hipèrbola amb els focus.
- **Circumferència principal:** és la que es determina fent centre a O , centre de la hipèrbola, i radi igual a la distància AO del semieix real.
- **Circumferència focal:** la hipèrbola té dues circumferències focals. Per dibuixar-les es pren com a radi l'eix real AB , i com a centre, F i F' , respectivament.
- **Asímptotes:** són rectes que passen pel centre de la hipèrbola, i són tangents a aquesta a l'infinit; a més, són simètriques en relació amb els eixos AB i CD . Es determinen traçant la circumferència principal amb centre a O . Es dibuixen rectes tangents des del focus F a la circumferència, i així es determinen els punts de tangència M i N . S'uneixen aquests punts amb O i s'obtenen totes dues asímptotes (Fig. 6.34).

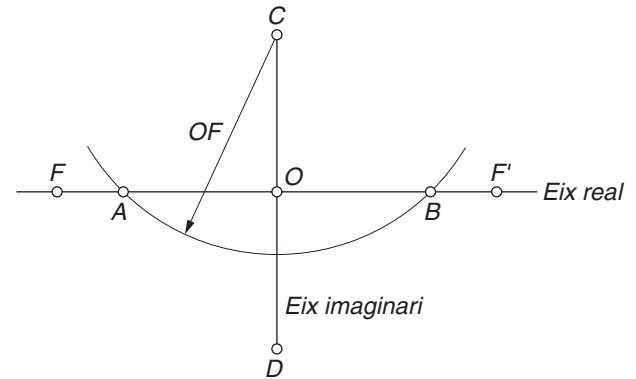


Fig. 6.31. Determinació de l'eix real de la hipèrbola.

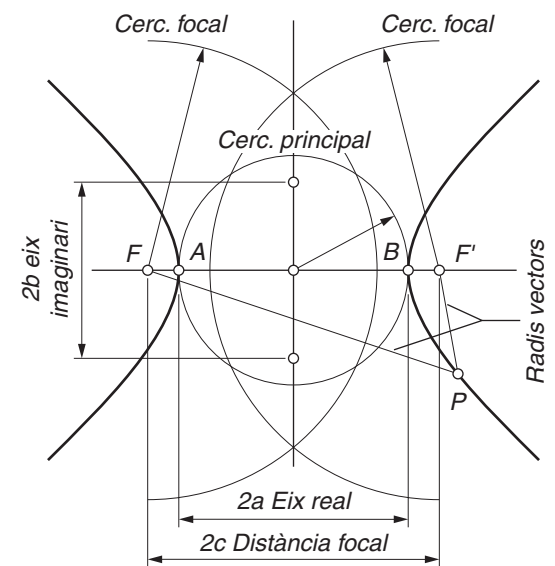


Fig. 6.33. Elements de la hipèrbola.

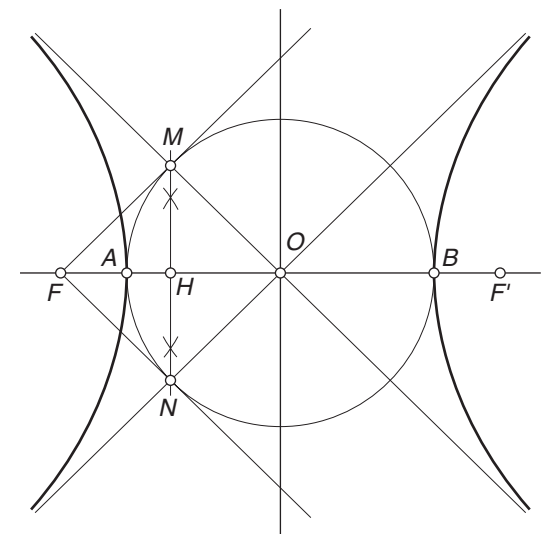
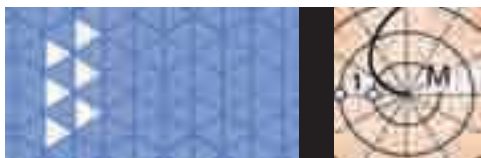


Fig. 6.34. Determinació de les asímptotes de la hipèrbola.



6. Corbes geomètriques

6.3. Corbes còniques

La nomenclatura més utilitzada en geometria per denominar els eixos i la distància focal és la següent:

- **Eix real** = $AB = 2a$; semieix menor o virtual a .
- **Eix imaginari** = $CD = 2b$; semieix major o real = b .
- **Distància focal** = $FF' = 2c$.

►►► Construcció de la hipèrbola

A continuació es desenvolupen alguns dels traçats de la hipèrbola més utilitzats en dibuix tècnic.

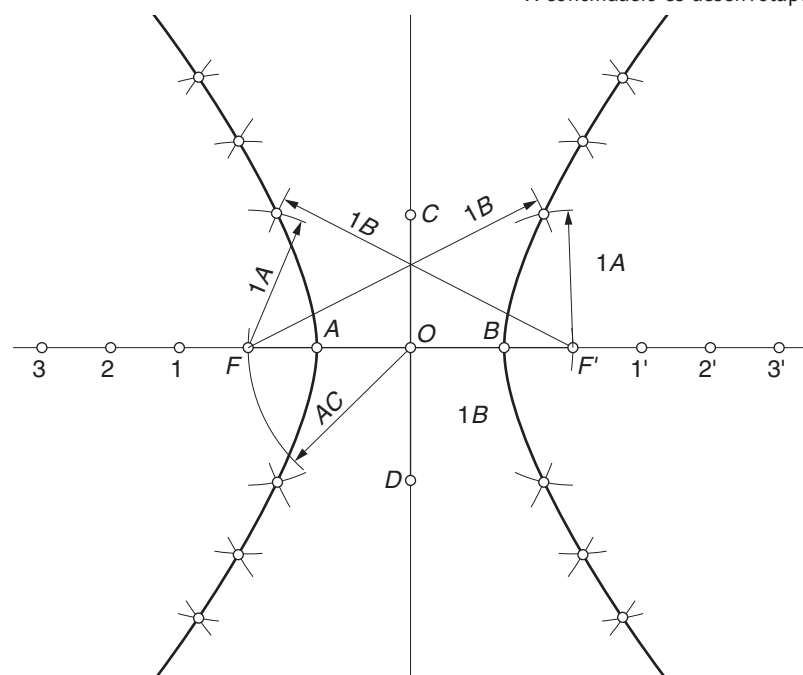


Fig. 6.35. Construcció de la hipèrbola coneixent tots dos eixos.

Hipèrbola coneixent tots dos eixos. Per punts

1. Un cop situats els eixos AB i CD , es procedeix a determinar els focus; amb centre a O i radi AC , es traça un arc, i on aquest talla l'eix real es troben els focus F i F' .
2. Se situen punts arbitraris: 1 i $1'$, 2 i $2'$, etc., sobre l'eix real a un i l'altre costat dels focus, F i F' , respectivament. Amb radi $1A$ i centre a F i F' es fan dos arcs; amb radi $1B$ i centre a F i F' es descriuen uns altres dos arcs, que tallen els anteriors i determinen els punts M i M' , i N i N' , de la corba de totes dues branques.
3. Repetint aquesta operació tantes vegades com punts hi hagi marcats sobre l'eix, s'obté la resta dels punts de la hipèrbola. Per últim, s'uneixen amb plantilles de corbes o a mà alçada fins acabar les dues branques de la corba (Fig. 6.35).

Hipèrbola coneixent les asímptotes i els vèrtexs

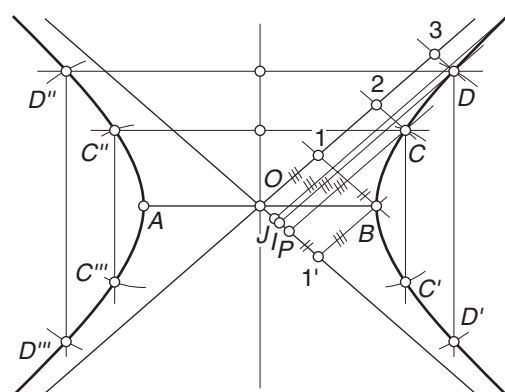


Fig. 6.36. Hipèrbola coneixent les asímptotes i els vèrtexs.

1. Es tracen paral·leles a les asímptotes pels vèrtexs A i B , i s'obtenen sobre aquestes els punts 1 i $1'$. Es porta sobre les asímptotes la distància $O1 = O1'$, i es determinen els punts $2, 3$, etc., pels quals es tracen paral·leles a l'asíntota.
2. Es divideix el segment $O1'$ en parts, que estan a $1/2$ de la distància $O1'$ (punt P), a $1/3$ (punt I), a $1/4$ (punt J), etc., de manera que les paral·leles traçades pels punts P, I, J , etc. tallen les traçades per 2 a C , per 3 a D , i així successivament.
3. Els punts de l'altra meitat de la branca en què s'ha treballat poden obtenir-se trobant els simètrics, en relació amb els eixos de la corba, dels ja determinats, com també els punts de l'altra branca (Fig. 6.36).



►► E. Paràbola

La paràbola és una corba plana i oberta, lloc geomètric de tots els punts del pla equidistants d'un de fix anomenat focus F i d'una recta d denominada directriu.

$$PF = FD$$

►►► Elements de la paràbola

Els elements més significatius que configuren la hipèrbola són els següents (Fig. 6.37):

- **Eix:** té només un eix de simetria, perpendicular a la directriu, i que conté el **vèrtex** i el **focus**.
- **Radis vectors:** són les rectes que uneixen un punt qualsevol de la paràbola amb el focus.
- **Circumferència principal:** té un radi infinit i és tangent a la paràbola en el seu vèrtex.
- **Circumferència focal:** també té un radi infinit i es converteix en una recta que coincideix amb la directriu.
- **Paràmetre:** és la longitud de la corda de la paràbola, perpendicular a l'eix, que passa pel focus.
- **Semiparàmetre:** és la distància des del focus fins a la directriu.

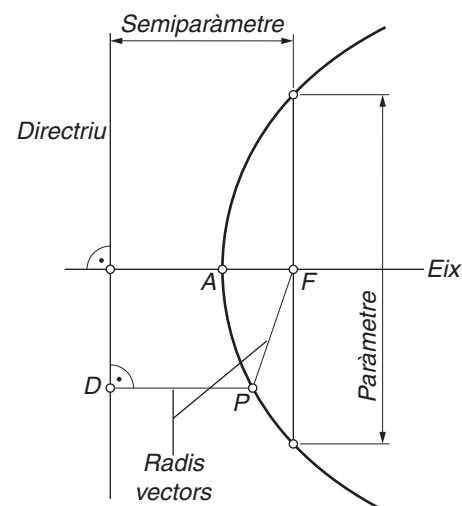


Fig. 6.37. Elements de la paràbola.

►►► Construcció de la paràbola

A continuació es desenvolupen alguns dels traçats de la paràbola més utilitzats en dibuix tècnic.

Paràbola coneixent la directriu i el focus. Per punts

1. Es dibuixen la directriu d i el focus F , i es troba el punt mig del segment OF , que és el vèrtex A de la corba. A partir del focus F se situen punts arbitraris: 1, 2, 3, etc., i s'hi tracen paral·leles a la directriu d .
2. Prenent com a radis les distàncies $O1$, $O2$, etc., i fent sempre centre al punt F , es tracen arcs que tallen, respectivament, les rectes que passen per 1, 2, 3, etc., i s'obtenen els punts M i M' , N i N' , i així successivament.
3. En unir aquests punts amb traç continu, resulta la paràbola buscada (Fig. 6.38).

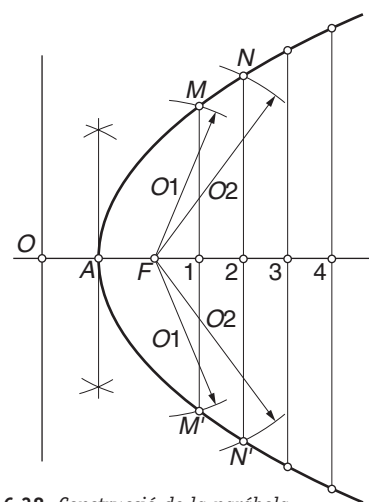


Fig. 6.38. Construcció de la paràbola coneixent la directriu i el focus.

Paràbola coneixent el vèrtex, l'eix i un punt P de la corba

1. Se situen les dades que tenim i es determina el punt P' , simètric de P en relació amb l'eix. Pel vèrtex A de la corba es traça una perpendicular a l'eix, i per P i P' es tracen les paral·leles a l'eix; on aquestes es tallen a la perpendicular s'obtenen els punts M i N .
2. Es divideixen MP i AM en un nombre de parts iguals, per exemple, sis. Per les divisions obtingudes sobre AM es tracen paral·leles a l'eix. S'uneixen amb el vèrtex A els punts de la divisió MP , i on aquestes rectes tallen les paral·leles s'obtenen els punts 1, 2, 3, etc. Els punts $1'$, $2'$, $3'$, etc. es troben per simetria.
3. Unint els punts així determinats amb una línia contínua, s'obté la paràbola que es demana (Fig. 6.39).

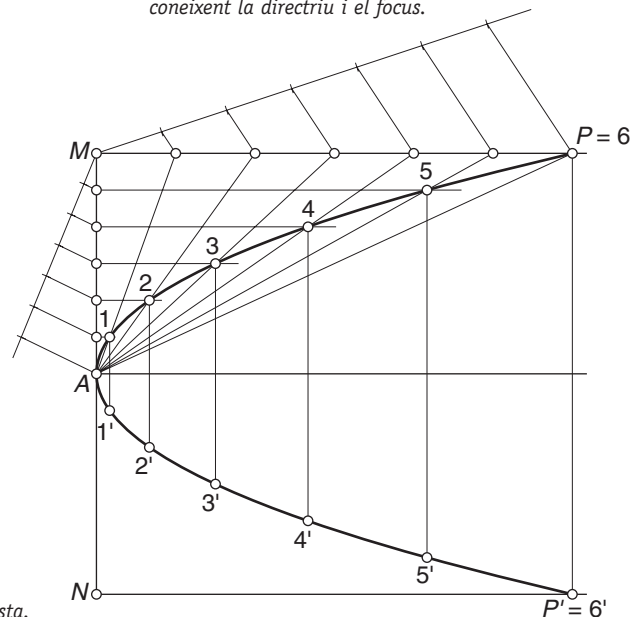


Fig. 6.39. Paràbola coneixent el vèrtex, l'eix i un punt d'aquesta.



6. Corbes geomètriques

Activitats

Qüestions

Respon de manera raonada les preguntes següents:

1. Com s'obtenen les corbes còniques? Classifica-les.
2. Comenta els elements més importants que formen les corbes còniques.
3. Què és una el·lipse? Quina nomenclatura es fa servir per denominar els eixos i la distància focal?

4. Comenta els elements que configuren l'el·lipse.
5. Dibuixa una el·lipse coneixent-ne tots dos eixos, per punts, i explica per escrit els passos seguits per construir-la.
6. Què és una hipèrbola? Quina nomenclatura es fa servir per denominar els eixos i la distància focal?

7. Comenta els elements que formen la hipèrbola.
8. Dibuixa una hipèrbola coneixent-ne les asímptotes i explica per escrit els passos seguits per construir-la.
9. Què és una paràbola?
10. Comenta els elements que configuren la paràbola.

Exercicis

1. Dibuixa una el·lipse per punts, sabent que els seus eixos tenen una longitud de 65 mm i 45 mm, respectivament.
2. Dibuixa una el·lipse per feixos projectius, sabent que els seus eixos tenen una longitud de 69 mm i 47 mm, respectivament.
3. Dibuixa una el·lipse, sabent que el seu eix major mesura 68 mm i la seva distància focal, 56 mm.
4. Dibuixa una el·lipse per circumferències concèntriques o afinitat, sabent que els seus eixos mesuren 73 mm i 57 mm, respectivament.
5. Dibuixa una el·lipse pel mètode de la tira de paper, sabent que dos dels seus diàmetres conjugats mesuren 78 mm i 56 mm, respectivament, i l'angle menor que formen entre ells és de 45° .
6. Dibuixa una hipèrbola per punts, sabent que $AB = 65$ mm, i $CD = 47$ mm.
7. Dibuixa una hipèrbola sabent que $AB = 65$ mm, i $CD = 47$ mm, fent servir per construir-la les asímptotes de la corba.

8. Dibuixa una paràbola per punts, sabent que la distància entre el vèrtex A de la corba i el seu focus és de 33 mm.

9. Amb ajuda d'el·lipses, que pots fer mitjançant el traçats geomètrics estudiats, dissenya dues figures ornamentals de manera similar a les que et proposem en la Figura 6.40.

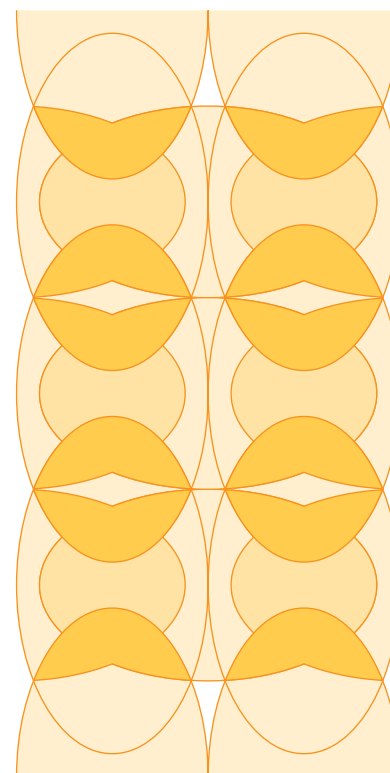
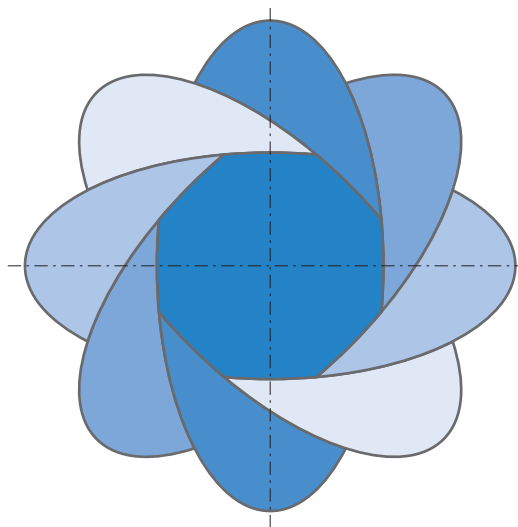


Fig. 6.40. Exercici 9, figures d'exemple.